理学コンファレンス用パズル

坂井公 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)

問題 1 (とっても平等な分割)**.**

1，2，3，4 を 2 つずつの数からなる 2 グループに分け，各グループの合計を等しくすることは簡単で，1 と 4 のグループ，2 と 3 のグループに分ければ $1+4=2+3$ だ。

では，1 からの 8 までの数を 4 つずつの数からなる 2 グループに分け，合計と 2 乗合計を両方とも等しくしてほしい。つまり，1 からの 8 までを a_1, a_2, a_3, a_4 と b_1, b_2, b_3, b_4 にグループ分けして，$a_1+a_2+a_3+a_4 = b_1+b_2+b_3+b_4$，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 = b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2$ となるようにしてほしい。

上の問題は，計算機でしらみつぶしに探しても得られるが，さらに一般に，1 から 2^{k+1} までの数を 2^k 個ずつの数からなる 2 グループに分け，(1 乗）合計，2 乗合計，3 乗合計，……，k 乗合計を全て等しくすることができるだろうか。できるならばその方法を，できないならその証明を与えてほしい。

解答例:

分割は可能だが，上の場合だけの分割法を直接構成しようとするとかえって難しくなる。

むしろ一般に，同じ長さの 2 つの数列 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ と $b_1, b_2, \ldots, b_m$ が与えられていて，各 $i = 1, \ldots, k-1$ に対して $\sum_{j=1}^m {a_j}^i = \sum_{j=1}^m {b_j}^i$ を満たすとき，長さを 2 倍に拡張した数列 $a_1, a_2 \ldots, a_{2m}$ と $b_1, b_2 \ldots, b_{2m}$ で，各 $i = 1, \ldots, k$ に対して $\sum_{j=1}^{2m} {a_j}^i = \sum_{j=1}^{2m} {b_j}^i$ を満たすものを構成することを考えよう。実は，s を任意の数値として，$a_{m+i} = b_i + s, b_{m+i} = a_i + s$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ とおけば，数列 $a_1, a_2 \ldots, a_{2m}$ と $b_1, b_2 \ldots, b_{2m}$ が求める拡張を与える。どうしてだろうか？

まず，条件より，$p(x)$ を k 次未満の任意の多項式としても，$\sum_{j=1}^m p(a_j) = \sum_{j=1}^m p(b_j)$ が成り立つことに注意しよう。したがって，多項式 $p(x)$ が k 次未満なら，$\sum_{j=1}^{2m} p(a_j) = \sum_{j=1}^m p(a_j) + \sum_{j=1}^m p(b_j+s)$ であり，右辺の第 1 項はもちろん $\sum_{j=1}^m p(b_j)$ に等しい。では第 2 項はというと，$p(x+s)$ が所詮 k 次未満の多項式にすぎないから，$\sum_{j=1}^m p(a_j+s)$ に等しい。よって $\sum_{j=1}^{2m} p(a_j) = \sum_{j=1}^{2m} p(b_j)$ が成り立つ。

残るのは $\sum_{j=1}^{2m} {a_j}^k = \sum_{j=1}^{2m} {b_j}^k$ の証明だけだが，2 項定理により，

$$\sum_{j=1}^{2m} {a_j}^k = \sum_{j=1}^m {a_j}^k + \sum_{j=1}^m (b_j+s)^k = \sum_{j=1}^m {a_j}^k + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} {b_j}^i s^{k-i} = \sum_{j=1}^m {a_j}^k + \sum_{j=1}^m {b_j}^k + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} {b_j}^i s^{k-i}$$

である。同様に

$$\sum_{j=1}^{2m} {b_j}^k = \sum_{j=1}^m {b_j}^k + \sum_{j=1}^m {a_j}^k + \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} {a_j}^i s^{k-i}$$

であるが，第 1 項と第 2 項の和は同じだし，$\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i s^{k-i}$ は k 次未満の多項式だから第 3 項同士も等しい。

さて，元の問題，すなわち 1 から 2^k までの数値の分割に対して，上の一般的な構成を適用するなら，$s = 2^k$ とすることで目的が達せられる。たとえば $1, 4$ および $2, 3$ という 2 つの列は，$1, 4, 2+4, 3+4$ および $2, 3, 1+4, 4+4$，すなわち $1, 4, 6, 7$ および $2, 3, 5, 8$ に拡張される。これはさらに $1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16$ および $2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15$ に拡張されるが，前者は 1 から 8 まで，後者は 1 から 16 までの数値の目的に合った分割を与える。この先の拡張も同様に可能である。 □

問題 2 (テーブルの上のたくさんのコイン).

長方形の中に同形同大の円が 100 個描いてある（円の中心が長方形内にあれば，長方形の辺からはみだすことはかまわないとする）。しかし，さらにもう一つ同じ円を描き加えようとすると，既に描いてある円のどれかと重なってしまう。

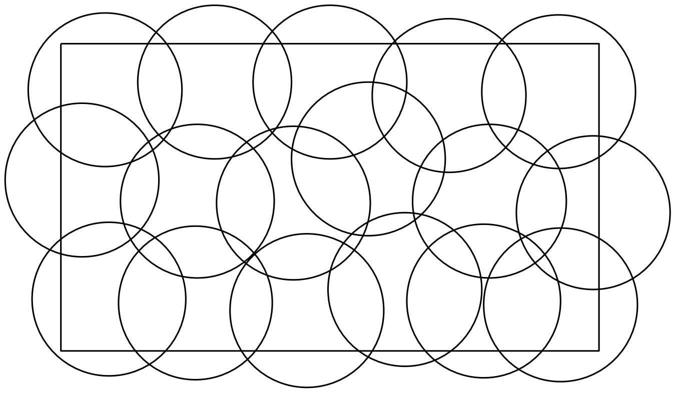
このとき，今，描いてある円を全部消し，同じ大きさの円を改めて 400 個描くことにすれば，長方形全体をその 400 個の円で必ず覆う方法があることを証明してほしい。

解答例:

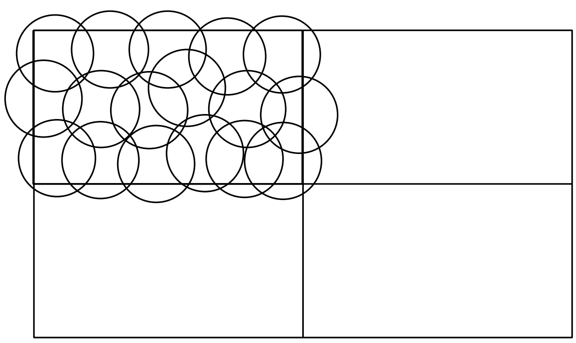
ポイントが 2 つほどある。

第 1 点は，長方形内に現在描かれている円の半径を 2 倍にすれば，長方形全体を覆ってしまうことに気がつくことだ。なぜなら，元の円の半径を 1 とするとき，こうしても覆われない点 P が長方形内にあるとすると，その点 P はどの円の中心からも 2 以上離れていることになる。それならば，円のサイズを元に戻したとき，P を中心に半径 1 の円を描いても既にあるどの円とも重ならないはずだが，これは条件に反する。

第 2 のポイントは，長方形は，サイズが半分のものを 4 つ集めると元のサイズのものが作れることだ。今，半径を 2 倍にした円で覆われている長方形を考え，その全体を半分に縮小してみよう。円は，半径が元に戻り，サイズが半分になった長方形を覆うことになる。その図を 4 枚コピーすれば，400 個の円で元の長方形を覆うこととができる。 □



2 倍の半径の円でなら覆える



半分に縮小して貼り付ける